

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס תורת ההתפלגות.
הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה,
המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את
התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם
רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי
שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים
שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים
להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם
לחויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר
www.gool.co.il.

GOOL
בשביל התירגול

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

תוכן עניינים

3	פרק 1 - המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)
13	פרק 2 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית
17	פרק 3 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה
20	פרק 4 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית
29	פרק 5 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמאלית
32	פרק 6 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף
35	פרק 7 - פונקציה יוצרת מומנטים
40	פרק 8 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים
44	פרק 9 - נוסחת התוחלת השלמה
47	פרק 10 - התפלגות מינימום ומקסימום
51	פרק 11 - התפלגות הדגימה
79	פרק 12 - אי שוויונים הסתברותיים
82	פרק 13 - משתנה מקרי דו ממדי רציף

פרק 1 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.

נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן

פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב $f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.

פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

פונקציית התפלגות מצטברת:

$$F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

כמו כן:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad p(X > t) = 1 - F(t)$$

תוחלת של משתנה רציף:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x) dx = \mu$$

שונות של משתנה רציף:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת של פונקציה של X:

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

אחוזונים:

האחוזון ה-P הוא ערך (נסמן אותו: x_p) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P. כלומר:

$$p(X \leq x_p) = p$$

ריענון מתמטי:**נוסחאות לחישוב שטחים:**

$$S_{\text{triangle}} = \frac{h \cdot a}{2} : \text{שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2}$$

$$S_{\text{rectangle}} = a \cdot b : \text{שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b)}$$

משוואת קו ישר:

$$y = mx + n$$

$$= \text{שיפוע}$$

$$n = \text{נקודת החיתוך עם ציר ה-y}$$

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} : (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) : \text{שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות}$$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (X_1, Y_1) ושיפועו ידוע m :

$$y - Y_1 = m(x - X_1)$$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$\int \tan(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax + b)| + c$$

$$\int \cot(ax + b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax + b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

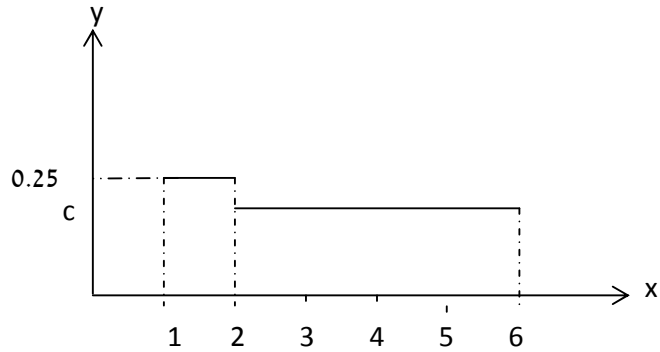
$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

תרגילים:

1. X הינו משתנה רציף עם פונקציה צפיפות כמוצג בשרטוט:



א. מצא את ערכו של c .

ב. בנה את פונקציה ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. $P(x < 4)$

2. $P(x > 1.5)$

3. $P(1.5 < x < 5)$

4. $P(5 < x < 10)$

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2. נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציה הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

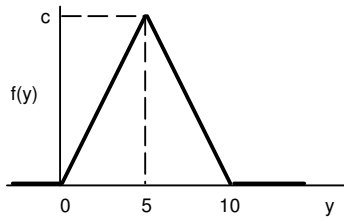
ידוע ש- $P(0 < X < 1) = 1/4$.

א. מצאו במפורש את פונקציה הצפיפות של X .

ב. מצאו את החציון של X .

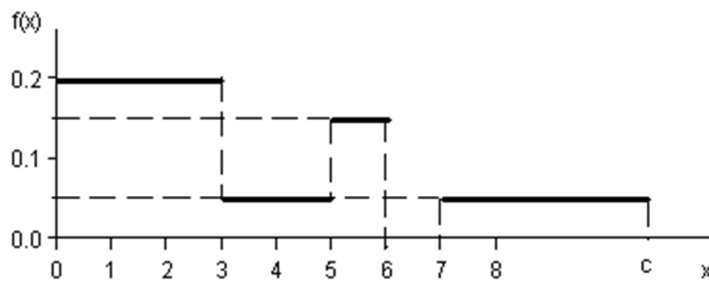
ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ- 0.5 ?

3. נתונה פונקציה צפיפות של משתנה מקרי Y :



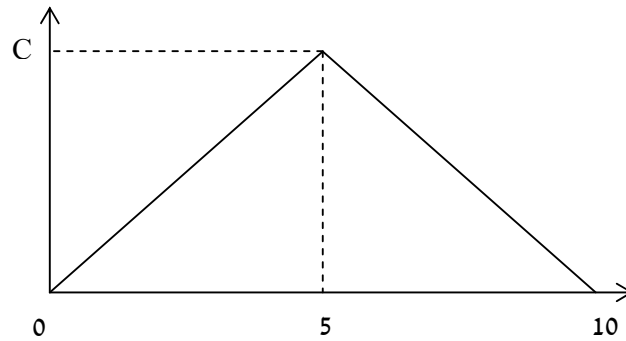
- א. מצאו את c .
 ב. מצאו את פונקציה ההתפלגות המצטברת של Y .
 ג. חשבו את ההסתברויות: $P(Y > 4)$, $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$, $P(Y \leq 3.0)$, $P(Y = 7.0)$.
 ד. מצאו את העשירון התחתון $y_{0.1}$, הרבעון התחתון $y_{0.25}$ והציון של Y . הסיקו מהו העשירון עליון $y_{0.9}$.

4. נתונה פונקציה צפיפות של משתנה מקרי X :



- א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציה צפיפות.
 ב. מצאו את פונקציה ההתפלגות המצטברת.
 ג. חשבו את ההסתברויות הבאות: $P(1.0 < X \leq 5.0)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(X \geq 4)$.

5. נתונה פונקציה צפיפות הבאה :



א. מה ערכו של C?

ב. מצא אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5

6. נתונה פונקציה צפיפות $f(X) = \frac{2}{x}$ פונקציה זו מוגדרת מ-1 ועד K.

א. מצא את ערכו של K.

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשב את הסיכוי ש X לפחות 1.5.

ד. מצא את העשירון התחתון של ההתפלגות.

ה. מה התוחלת של X?

7. נתונה פונקציה צפיפות הבאה: $f(X) = AX^2(10 - X)$ $0 < X < 10$ A הינו קבוע חיובי.

א. מצא את A.

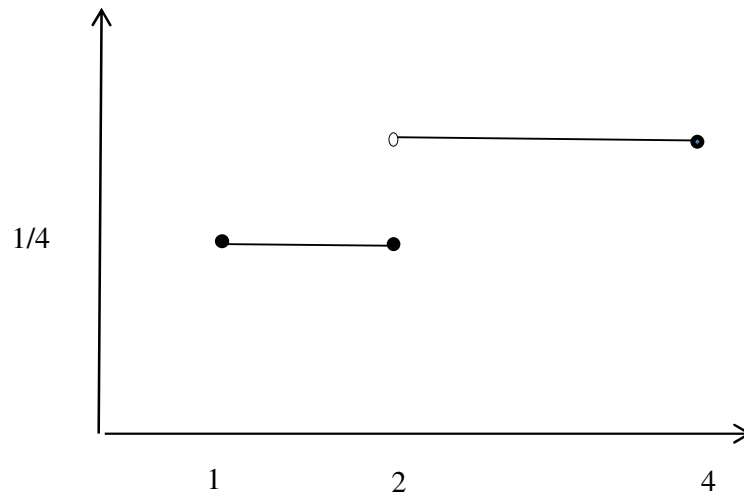
ב. חשב את $P(x > 5 | x > 2)$.

ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X :
 $f(x) = 0.5 \cdot e^{2x}$
 $-\infty \leq X \leq \ln(c)$

- מצא את ערכו של c .
- מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.
- חשב $P(X > 0)$.
- מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X :



- רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות.
- בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- מצא את החציון של ההתפלגות.
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה.
- חשב את $E(X^3)$.

10. במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = 6x(1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

- א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ 20 דקות?
 ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?
 ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ 20 דקות?

11. זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה:

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

- א. שרטט את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
 ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?
 ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?
 ד. מהו הזמן ש90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ bx - 4b & 4 \leq x \leq 5 \\ b & 5 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

- א. מצאו את b.
 ב. חשבו את התוחלת של X.
 ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5. מהי השונות של Y?

13. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ kx & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של k .
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
 ג. חשבו $p(x > 2.5)$

14. להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

- א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
 ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.
 ג. מצא את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

פתרונות :שאלה 1 :

$$\text{א. } \frac{3}{16} \cdot \text{ד. } \frac{1}{3}$$

שאלה 2 :

$$\text{א. } c=0.5 \quad b=2$$

$$\text{ב. } 1.41$$

$$\text{ג. } 0.0625$$

שאלה 3 :

$$\text{א. } 0.2$$

$$\text{ג. } 0, 0.18, 0.125, 0.32$$

$$\text{ד. העשירון התחתון : } 2.24$$

$$\text{הרבעון התחתון : } 3.54$$

$$\text{החציון : } 5$$

$$\text{העשירון העליון : } 7.76$$

שאלה 4 :

$$\text{א. } 10$$

שאלה 5 :

$$\text{א. } C=0.2$$

$$\text{ב. } 5 \pm 1.46$$

שאלה 6 :

$$\text{א. } \frac{1}{e^2}$$

$$\text{ג. } 0.189$$

$$\text{ד. } 1.051$$

$$\text{ה. } 1.297$$

שאלה 7 :

$$\text{א. } 0.0012$$

$$\text{ב. } 0.7067$$

שאלה 8 :

$$\text{א. } 2$$

$$\text{ג. } 0.75$$

$$\text{ד. } 0.549$$

$$\text{ג. תוחלת : } 6, \text{ שונות : } 4$$

שאלה 9 :

ג. $2\frac{2}{3}$

ד. תוחלת : 2.625 שונות : 0.6927

ה. 23.4375

שאלה 10 :

א. $\frac{7}{27}$

ב. 0

ג. 3.704

שאלה 11 :שאלה 12 :

א. $\frac{2}{3}$

ב. 5.22

ג. $\frac{2}{9}$

ב. 0.0498

ג. 0.6321

ד. 11.51

שאלה 13 :

ב. תוחלת :

שאלה 14 :

א. $\frac{1}{6}$

ג. 0.229

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות :

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

פרק 2 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות מעריכית

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית).

$$X \sim \exp(\lambda) \text{ כאשר } \lambda > 0$$

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד התרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות היא:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ לכל } x \geq 0$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת היא:

$$F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

התוחלת:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

• להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון: $P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ- 9 שעות?

ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

תרגילים:

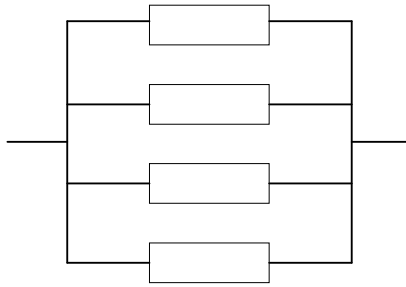
1. הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
 - א. מה הסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
 - ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
 - ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.

2. הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
 - א. מהי סטיית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
 - ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
 - ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

3. משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
 - א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
 - ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
 - ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
 - ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?

4. בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
 - א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
 - ב. אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
 - ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.

אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪. כמו כן אם

המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.

מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

פתרונות:**שאלה 1:**

א. 0.368

ב. 0.865

ג. 0.347

שאלה 2:

א. 24 שעות

ב. 0.632

ג. 0.135

שאלה 3:

א. 0.393

ב. 0.239

ג. 0.513

ד. 69.08

שאלה 4:

א. 0.264

ב. 0.368

ג. 0.233

שאלה 5:

א. 0.8403

ב. $A0.0588 > K$

פרק 3 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b .

$$X \sim U(a, b)$$

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

התוחלת:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

X -משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

א. מה הסיכוי ש- X קטן מ-25?

ב. מה התוחלת והשונות של X ?

תרגילים:

1. משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X , מתפלג $U(13, 16)$.
 - א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?
 - ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
 - ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
 - א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
 - ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
 - ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3. מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).
 - א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?
 - ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?
 - ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

פתרונות:**שאלה 2:**א. $X \sim U(0,10)$

ב. 0.6

ג. 10

שאלה 1:

א. תוחלת: 14.5

שונות: 0.866

ב. $1/3$ ג. $2/3$ **שאלה 3:**

א. 0.2

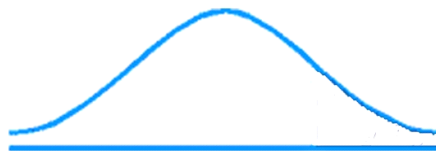
ב. $\frac{2}{7}$

ג. 109

פרק 4 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} : \text{נוסחת פונקציית הצפיפות}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות Z .

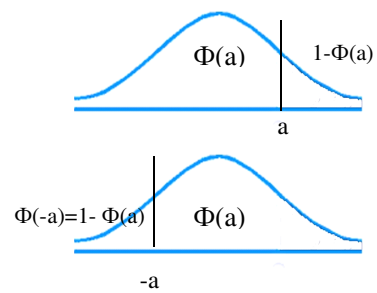
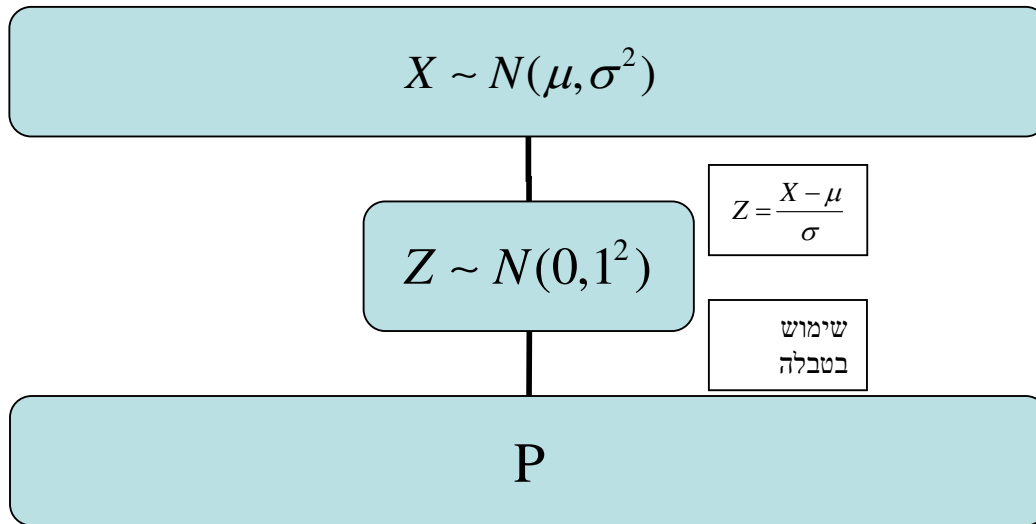
$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

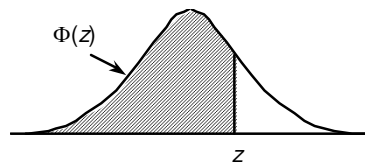
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע. לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
- ד. מהו המשקל ש90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
 - א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
 - ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
 - ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
 - ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
 - ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונויות של 9 דקות רבועות.
 - א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
 - ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
 - ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
 - ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
 - א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
 - ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
 - ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
 - ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
 - ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל- 140 ק"ג?

4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.
 - א. מצאו את העשירון העליון.
 - ב. מצאו את האחוזון ה-95.
 - ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225 .
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - מהו האחוזון ה- 20?
 - מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש-33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
 - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
 - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
 - מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?
 - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?

- א. בעשירון העליון.
 ב. בממוצע.
 ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

- א. 1
 ב. 2
 ג. 3
 ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
 ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
 ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?
 ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל-T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 1</u>
א. 26.43%	א. 89.25%
ב. 89.44%	ב. 2.28%
ג. 39.44%	ג. 0
ד. 0.383	ד. 50%
ה. 100%	

<u>שאלה 7</u>	<u>שאלה 5</u>
א. 500	א. 119.2
ב. 100	ב. 80.8
ג. 0.3446	ג. 112.6
ד. 733	ד. 87.4
ה. 267	

<u>שאלה 9</u>	<u>שאלה 8</u>
א. 0.1587	א. 3
ב. 0.0228	ב. בממוצע.
ג. 0.8563	ג. 1
ד. 0.3975	

<u>שאלה 11</u>	<u>שאלה 10</u>
א. 0.1359	א. 1925
ב. 0.675	ב. 0.2266
ג. 100	ג. 0.1587
ד. 0.25	

פרק 5 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמאלית

רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית מתפלגת נורמאלית בעצמה.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ, כמו כן הגובה של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.

מה הסיכוי שגבר אקראי מהמדינה יהיה גבוה מאישה אקראית? (0.7823)

תרגילים:

1. המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
כמו כן המשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?
2. ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪. ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
3. צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק"ג וסטיית תקן של 4 ק"ג. נתון שמחיר ק"ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?
4. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
5. לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נימכר ב- 2 ₪ וליטר חלב עזה נימכר ב-3 ₪.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות 62 ₪?
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל- 30 ליטר?
ג. מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

פתרונות:**שאלה 1**

0.2177

שאלה 2

א. תוחלת 7000, סטיית תקן 2247.

ב. 0.3264

ג. 9881

שאלה 3

א. תוחלת 300, שונות 576.

ב. 0.3372

ג. 294

שאלה 4

א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל.

ב. 0.0062

פרק 6 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף

רקע:

מדובר על מצב שידועה לנו התפלגות של משתנה מקרי רציף כלשהו ואז יוצרים משתנה מקרי חדש שהוא פונקציה של המשתנה המקרי הידוע.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתון משתנה מקרי רציף: X המתפלג אחיד בין 0 ל-1. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת

של המשתנה Y . כאשר הקשר בין X ל- Y נתון על ידי הנוסחה: $Y = e^x$.

תרגילים:

1. יהי W משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת השווה ל-1. הגדירו משתנה חדש $Y = e^{-W}$.
 א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .
 ב. זהה את Y כהתפלגות מיוחדת וקבע מהם הפרמטרים.
2. נתון ש- $X \sim U(0,1)$. יוצרים דרך X משתנה חדש המוגדר להיות: $R = X^2$. מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה החדש R .
3. ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda)$ כמו כן נתון הקשר הבא: $Y = \ln(X)$. הוכח שפונקציית הצפיפות של Y נתונה על ידי הנוסחה הבאה: $f(Y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot e^Y + 1}$.
4. ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda = 1)$ כמו כן נתון הקשר הבא: $Y = 1 - 2 \cdot e^{-X}$.
 א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .
 ב. זהה את ההתפלגות של Y .
5. אורך מקצוע של קובייה מתפלג אחיד בין 1 ל-2. מצא את פונקציית הצפיפות של נפח הקובייה.
6. נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F_X(t) = \theta^t - 1$ עבור התחום $0 \leq t \leq 1$.
 א. מצא את ערכו של הפרמטר θ .
 ב. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה X .
 ג. יהי $Y = 2^X - 1$. מצא את פונקציית הצפיפות של Y וזהה את התפלגותו.

פתרונות:**שאלה 1:**

$$Y \sim U(0,1) \quad \text{ב.}$$

שאלה 2:

$$0 < R < 1 \quad \text{כאשר} \quad f(R) = \frac{1}{2\sqrt{R}}$$

שאלה 4:

$$Y \sim U(-1,1)$$

שאלה 5:

$$1 < y < 8 \quad \text{כאשר} \quad f(y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

שאלה 6:

א. 2

$$Y \sim U(0,1) \quad \text{ג.}$$

פרק 7 - פונקציה יוצרת מומנטים

רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות : $M_X(t) = E(e^{t \cdot X})$.

אם מדובר במשתנה מקרי בדיד . פונקציית יוצרת המומנטים תהיה :

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = \sum_k e^{t \cdot k} \cdot P(X = k)$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף. פונקציית יוצרת המומנטים תהיה :

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_x e^{t \cdot x} \cdot f(x) dx$$

המומנט מסדר n מוגדר להיות : $E(X^n)$

מומנט מסדר n של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת החית לפי t של פונקציית יוצרת המומנטים

$$M_X^{(n)}(t)|_{t=0} = E(X^n) \text{ . כלומר : } t=0$$

משפט : קיימת התאמה חד חד ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ כלל שרשרת}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הראו שפונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות המעריכית $X \sim \exp(\lambda)$

$$\text{היא: } \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

תרגילים:

1. נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.

X	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.

ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א.

2. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית $X \sim B(n, p)$ ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

3. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית $X \sim G(P)$ וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

4. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית $x \sim p(\lambda)$. מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות

5. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצאו את ערכו של A.

ב. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של X.

6. יהי X משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16. יהי $m_x(t)$ פונקציית יוצרת המומנטים של X.

Y הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים $m_y(t)$.

$$m_y(t) = t \cdot m_x(t)$$

חשבו את התוחלת והשונות של y.

פתרונות:**שאלה 1:**

$$1\frac{2}{3} \quad \text{ב.}$$

שאלה 2:

פונקציית יוצרת מומנטים: $(e^t \cdot p + 1 - p)^n$

שאלה 3:

פונקציית יוצרת מומנטים: $\frac{e^t p}{1 - e^t \cdot (1 - p)}$

שאלה 4:

פונקציית יוצרת המומנטים: $e^{\lambda(e^t - 1)}$

שאלה 5:

$$\frac{1}{1 - e^{-7}} \quad \text{א.}$$

שאלה 6:

תוחלת: 1 שונות: 9

נספח:

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$	פונקציית צפיפות $f_x(t)$	התפלגות
$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2}$	$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t < b \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	אחיד $U(a,b)$
$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$F_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	מעריכי $\exp(\lambda)$
$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	σ^2	μ	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	$P_X(x)$	משמעות	משתנה מקרי
$[pe^t + q]^n$	$n \cdot p \cdot q$	$n \cdot p$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: p ההסתברות להצלחה l-p=q ההסתברות לכשלון x: מספר ההצלחות	בינומי $Bin(n, p)$
$\frac{pe^t}{1-qe^t}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots, \infty$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x: מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	גיאומטרי $G(p)$
$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	x: מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים 0, 1, ..., ∞	פואסוני $Pois(\lambda)$

פרק 8 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים

רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים: $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$
- אם X ו- Y משתנים בלתי תלויים מתקיים ש: $M_{X+Y}(t) = E(e^{t \cdot X}) \cdot E(e^{t \cdot Y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

תזכורת:

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_X(t)$	פונקציית צפיפות $f_X(t)$	התפלגות
$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$	$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	אחיד $U(a,b)$
$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	מעריכי $\exp(\lambda)$
$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	σ^2	μ	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	$P_X(x)$	משמעות	משתנה מקרי
$[pe^t + q]^n$	$n \cdot p \cdot q$	$n \cdot p$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: p ההסתברות להצלחה $1-p=q$ ההסתברות לכשלון x : מספר ההצלחות	בינומי $Bin(n, p)$
$\frac{pe^t}{1-qe^t}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots, \infty$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	גיאומטרי $G(p)$
$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	x : מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$	פואסוני $Pois(\lambda)$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתון: $X \sim P(\lambda = 4)$

$Y \sim P(\lambda = 2)$

X ו-Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של $5X-3$?

ב. נגדיר את $T=X+Y$. מה ההתפלגות של T?

תרגילים:

1. נתון ש $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצא את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^n X_i$

ב. הוכח ש $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n \cdot \lambda)$

2. נתון: $X \sim P(\lambda = 10)$

$Y \sim P(\lambda = 2)$

X ו-Y הינם בלתי תלויים.

נגדיר את $T = X + Y$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. הוכיחו ש $T \sim P(\lambda = 12)$

ג. הוכיחו ש $X / T = 8 \sim B(8, \frac{5}{6})$ כלומר, ההתפלגות של X בהינתן ש $T=8$ היא בינומית

עם הפרמטרים $n=8$ ו- $p = \frac{5}{6}$.

3. יהי $X_i \sim \exp(1)$ $i = 1, 2, \dots, n$ והמשתנים הם בלתי תלויים. נגדיר את $T = \sum_{i=1}^n X_i$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של T.

ג. יהי $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של T. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z.

4. נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

כאשר: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

א. הוכח שאם $Y=2X$ אזי $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$

ב. הוכח שאם $T = X_1 + X_2$ ו- X_1 ו- X_2 בלתי תלויים מאותה התפלגות נורמלית אז

מתקיים ש: $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$

פרק 9 - נוסחת התוחלת השלמה

רקע:

אם נזהה שהתפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y מתקיים ש:

$$E(X) = E[E(X|Y)]$$

עבור משתנה Y בדיד כלשהו:

$$E(X) = \sum_y E(X|Y=y) \cdot P(Y=y)$$

עבור משתנה Y רציף כלשהו:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y) \cdot f(y) dy$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה. בכיתה מספר 1 : 10 בנים ו-20 בנות.

בכיתה מספר 2 : 15 בנים ו-15 בנות. המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי. יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו. יש לחשב את $E(X)$.

תרגילים:

1. בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי. אם הכדור ירוק מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1. אם הכדור כחול מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5. אם הכדור אדום מטילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית. חשבו את תוחלת מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.
2. מטילים n מטבעות ומוציאים מהמשחק את כל המטבעות שהראו ראש. כעת מטילים את כל המטבעות שנותרו. בטאו באמצעות n את תוחלת מספר הראשים שהתקבלו בסבב השני של ההטלות.
3. בהגרלה מבצעים את התהליך הבא: בסיכוי 0.25 מגרילים מספר ממכונה A בסיכוי 0.75 מגרילים מספר ממכונה B. במכונה A המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. במכונה B המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 2. אם הוגרל המספר 0 זוכים ב-15 ₪. אחרת זוכים ב-50 ₪. חשבו את תוחלת סכום הזכייה.
4. נתון ש $Y / X \sim U(0, X)$ כאשר פונקציית הצפיפות של X הינה:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & 2 \leq x \leq 6 \\ 0.2 & 6 < x \leq 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשבו את $E(Y)$.

5. בתכנית הריאליטי "המרוץ למיליון" מגיעים לנקודה שבה שלוש אפשרויות בפני המתמודדים: נקודה A שבה חוזרים אחרי 1 שעות לנקודת המוצא. נקודה B שבה חוזרים אחרי 2 שעות לנקודת המוצא. נקודה C המובילה תוך 2 שעות לנקודת הסיום. המתמודדים בוחרים בכל פעם את הנקודה באופן מקרי. נסמן ב- X את זמן ההגעה לנקודת הסיום. חשבו את $E(X)$.

פתרונות:**שאלה 1**

4.4

שאלה 2

$$\frac{n}{4}$$

שאלה 3

46.4

שאלה 4

3.05

שאלה 5

5

פרק 10 - התפלגות מינימום ומקסימום

רקע:

התפלגות מקסימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה. נגדיר את

$$U = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

מתקיים ש :

$$F_U(t) = (F_X(t))^n$$

ולכן :

$$f(u) = n \cdot (F_X(u))^{n-1} \cdot f_X(u)$$

התפלגות מינימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה. נגדיר את

$$Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

מתקיים ש :

$$F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n$$

$$f(z) = n \cdot [1 - F_X(z)]^{n-1} \cdot f_X(z) \quad \text{ולכן :}$$

דוגמה : (הפתרון בהקלטה)

$$X_i \sim \exp(\lambda)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \min(x_i) \sim \exp(n\lambda) \quad \text{הוכח ש :}$$

תרגילים:

1. א. הוכח שאם X_i מתפלג רציף עבור כל $i = 1, 2, \dots, n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו-
 $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

$$\text{מתקיים ש: } f(z) = n[1 - F_x(z)]^{n-1} \cdot f_x(z)$$

- ב. הוכח שאם X_i מתפלג רציף עבור כל $i = 1, 2, \dots, n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו-
 $U = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\text{מתקיים ש: } f(u) = n \cdot (F_x(u))^{n-1} \cdot f_x(u)$$

2. אורך חיי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 יום.
 א. מכשיר בנוי מ-3 רכיבים בלתי תלויים המחוברים במקביל. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של אורך חיי מכשיר.
 ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מחוברים בטור.
 ג. מה התוחלת והשונות של אורך חיי המכשיר המתואר בסעיף ב?
3. בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדם תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם קצב של 8 הירדמויות בשעה. המורה צועק אחרי שנרדם התלמיד הראשון ועוזב את הכיתה שנרדם התלמיד האחרון.
 א. מה הסיכוי שיצעק אחרי פחות מדקה?
 ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחרי פחות מדקה?
4. שלושה אנשים משתתפים בתחרות ריצה של 100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק בזמן שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.
 א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגבוה מ-10.5 שניות?
 ב. מה הסיכוי שהמפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 שניות?
 ג. מהי התפלגות זמן הריצה של המפסיד בתחרות? מצא את התוחלת והשונות שלו?
5. X_1, X_2 מתפלגים נורמאלית סטנדרטית. נגדיר את $Z = \min(X_1, X_2)$ ואת $Y = \max(X_1, X_2)$
 א. חשב $P(z > 1)$
 ב. חשב $P(Y > 1)$
 ג. חשב $P(Y > 1 / Y > 0)$

6. רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיקור ומניקור בו זמנית. משך זמן הפדיקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיקור.
 א. מצא את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא יעלה על שעה.
 ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיקור עלה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן בטיפול במכון היופי לא יעלה על 20 דקות?

7. נתון ש: $X \sim \exp(\lambda)$ ו- $Y \sim \exp(\mu)$. כמו x, y בלתי תלויים. הוכח ש

$$U = \min(x, y)$$

$$U \sim \exp(\mu + \lambda)$$

8. X_1 ו- X_2 שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל-1. נגדיר

$$Y = \max(x_1, x_2)$$

 חשב את $P(Y > 0.5)$

9. נתון ש $X_i \sim U(0, 2)$ בלתי תלויים זה בזה כאשר $i = 1, 2, \dots, 5$. מצא את פונקציית הצפיפות של

$$T = \max(X_i)$$

10. נתון משתנה מקרי X בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נגדיר את $W = \max(X_i)$ כאשר $i = 1, 2, \dots, 10$ חשב את $E(W)$

פתרונות:**שאלה 1**

הוכחה

שאלה 2

ג. תוחלת : 10

שוונות : 100

שאלה 3

א. 0.9817

ב. 0

שאלה 4

א. 0.421875

ב. 0.216

ג. תוחלת : 11.5 שונות : 0.15

שאלה 5

א. 0.02518

ב. 0.2922

ג. 0.3896

שאלה 6

א. 0.9328

ב. 0.2898

שאלה 7

הוכחה

שאלה 8

0.75

שאלה 9

$$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^4$$

שאלה 1030

31

פרק 11 - התפלגות הדגימה
ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

רקע:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} : \text{ בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם :}$$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

א. תכונות התפלגות

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n . תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:

$$V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם טעות תקן:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

ב. דגימה מהתפלגות נורמאלית

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

ג. משפט הגבול המרכזי

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול ($n \geq 30$)

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל 102 גרם?

תרגילים :

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?
2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה בישוב מסוים :

מספר משפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- נגדיר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.
- בנו את פונקצית ההסתברות של x .
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x .
 - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
3. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג ?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

5. הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.

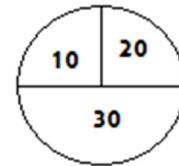
א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?

ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8. משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4 .
 א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
 ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
 ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.
9. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט :



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
 ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
 ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
 ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?
10. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?
11. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב-50 ההטלות?
12. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ .
 א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?
 ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?
 ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.
13. נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	P(X)

- מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50 . מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14. נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו במוצע המדגם \bar{X} :

לכן $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה : (בחר בתשובה הנכונה)

א. 0

ב. 0.5

ג. 1

ד. לא ניתן לדעת.

15. נתון ש X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים ש :

(בחר בתשובה הנכונה)

א. $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ב. $\mu \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

ד. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

16. נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ אזי :

(בחר בתשובה הנכונה)

א. μ ו- \bar{X} יהיו משתנים מקריים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו \bar{X} קבוע.

ג. \bar{X} יהיה משתנה מקרי ו μ קבוע.

ד. μ ו \bar{X} יהיו קבועים.

17. משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם . החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.
 א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
 ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18. משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19. מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים. מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20. הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונויות σ^2 ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

פתרונות:**שאלה 2**

א.

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(x)

ב. $\mu = 2.05 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$

$$\sigma(\bar{X}) = 0.486$$

שאלה 3

$$\mu_{\bar{x}} = 3.5$$

$$\sigma(\bar{X}) = 1.21$$

שאלה 4

א. 0.8413

ב. 0.0013

ג. 0

ד. 0.1974

שאלה 6

א. 0.0465

ב. 27.71

ג. 0.2628

שאלה 7

א. 0

ב. 0.1587

ג. 0.1587

ד. 0.5

שאלה 8

א. 0.5468

ב. 0.6826

שאלה 9

א.

30	20	10	
0.5	0.25	0.25	P(x)

ב. התוחלת: 22.5

השונות: 68.75

ג. התוחלת: 22.5

השונות: 13.75

ד. 0.8997

שאלה 10

0.0475

שאלה 11

0.1814

שאלה 12

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

שאלה 14

התשובה ב

שאלה 15

התשובה ד

שאלה 16

התשובה ג

שאלה 17

א. 2.429

ב. 0.25

התפלגות סכום תצפיות המדגם ומשפט הגבול המרכזי

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם $T = \sum_{i=1}^n X_i$

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה.

כלומר, היו X_1, \dots, X_n - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

א. התוחלת והשונות של סכום התצפיות:

$$E(T) = n\mu$$

$$V(T) = n\sigma^2$$

ב. דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

$$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad \text{אזי}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{אם}$$

ג. משפט הגבול המרכזי:

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2 \quad \text{אם } X \text{ מתפלג כלשהו וידוע}$$

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30)

$$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

א. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
 ב. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים? (0.1587)

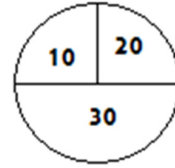
תרגילים:

1. המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
 א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?
 ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
 ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
2. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
 א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?
 ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
 ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב הייתה משתנה?
3. בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב 4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.
 א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
 ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?
4. במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

- נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תליות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).
 א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין ?
 ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות , מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

5. בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. אם האדם משחק את המשחק 50 פעמים מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 שקלים ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק את המשחק 50 פעם עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה

ב- 1050 שקלים ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

6. נתון ש $X_i \sim \exp(\lambda = 1)$ כאשר $i = 1, 2, \dots, 100$,

$$P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$$

7. אורך חיי סוללה בשעות הוא בעל פונקציה הצפיפות הבאה :

$$f(x) = 2x \quad 0 < x < 1$$

ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

פתרונות:**שאלה 1**

א. 0.6915

ב. 0.8413

ג. 0.5

שאלה 2

א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל

ב. 0.0062

שאלה 4

א. 0.883

שאלה 5

א. 0.8997

ב. תוחלת : 1.111 שונות 0.1239

שאלה 7

56

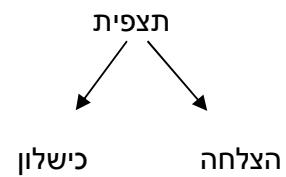
רקע:**תזכורת על התפלגות בינומית**

בפרק זה נדון על התפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).

מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y .

מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.

כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים).



הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר $q = 1 - p$.

מבצעים מדגם אקראי בגודל n .

$$Y \sim B(n, p)$$

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$E(y) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(y) = npq \quad \text{שונות}$$

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית

אם לפנינו התפלגות בינומית : $Y \sim B(n, p)$ ומתקיים ש :

$$1. n \cdot p \geq 5$$

$$2. n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \sim N(np, npq)$$

$$\text{אז : } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות .
הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.
על פי הכללים הבאים :

$$1. p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. n \cdot p \geq 5$$

$$2. n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. n \cdot p \geq 10$$

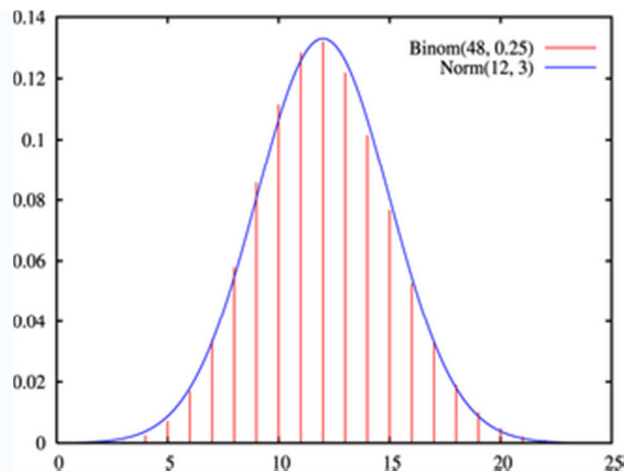
$$2. n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שפשוט התנאי שהם נותנים הוא: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) אני בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

- מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
- מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



תרגילים:

1. נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?

2. במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
 - א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
 - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?

3. ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלנו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
 4. מטילים מטבע 50 פעמים.
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

5. במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אךן יגיע הוא 0.9.
 - א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 - ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?

6. מפעל לייצור ארטיקים טוען ש הסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
 7. מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?
 8. לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - ברק קנדל ©

פתרונות :**שאלה 1**

א. 0.201

ב. 0.3758

ג. התוחלת : 2, סטיית התקן : 1.2649

שאלה 2

א. 0.9332

ב. 0.6915

שאלה 3

0.1611

שאלה 4

א. 0.9406

שאלה 5

א. 0.015

שאלה 6

0.8544

שאלה 7

0.8643

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם

רקע:

בפרק זה נדון על התפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.

Y - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם)

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \text{ - פרופורציית ההצלחות במדגם (למשל, שיעור המובטלים במדגם)}$$

למשל,

$$n = 200$$

מספר המובטלים : $Y = 20$

$$\hat{p} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ פרופורציית המובטלים במדגם}$$

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.

נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E(\hat{P}) = p$$

$$V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

אם $np \geq 5$ & $nq \geq 5$ אזי $\hat{p} \sim N(p, \frac{pq}{n})$

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי : $(n \geq 30)$.

- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.
 - כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.
- דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

- א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית (\hat{p}) של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
- ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

תרגילים:

1. במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
 - א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
 - ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
 - ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?

2. נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

 - א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ב. לכל היותר 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ג. יותר מ- 27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

3. לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון".

נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.

 - א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל 40% יש סמארטפון?
 - ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמארטפון?
 - ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמרטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
 - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

4. נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
 - א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
 - ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמתית ביותר מ-4%?
 - ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
 - ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?

5. נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ל"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

6. נתון ש $X \sim B(n, p)$ נגדיר את המשתנה הבא : $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש :

$$E(\hat{P}) = p$$

$$V(\hat{P}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

פתרונות:**שאלה 1**

א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064

ב. 0.5

ג. 0.3446

שאלה 2

א. 0.0618

ב. 0.0618

ג. 0.8238

שאלה 3

א. 0.5

ב. 0

ג. 0.8968

ד. גדלה

שאלה 4

א. 0.0062

ב. 0.0456

חוק המספרים הגדולים

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - ברק קנדל ©

רקע:

חוק המספרים הגדולים מתייחס להשפעת הגדלת גודל המדגם על הסיכוי של פרופורציית המדגם (או ממוצע המדגם) להיות קרובה מהפרופורציה האמתית (או מהממוצע האמתי).

החוק לגבי פרופורציה:

נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה אינסופית בה פרופורציית ההצלחות היא p , ככל שהמדגם גדול יותר:

כך הסיכוי שפרופורציית המדגם (\hat{p}) תהיה בקרבת הפרופורציה באוכלוסייה (P) גבוה יותר.

ולכן הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהפרופורציה של האוכלוסייה קטן יותר.

בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הפרופורציה באופן הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_n = P$$

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.

את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא:

$$P(|\hat{P} - P| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

הערה:

ככל שהמדגם גדל הסיכוי שפרופורציית המדגם תהיה בדיוק הפרופורצייה האמתית הולך וקטן.

החוק לגבי ממוצע:

נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך התפלגות שבה התוחלת μ והשונות סופית,

ככל שהמדגם גדול יותר:

כך הסיכוי שממוצע המדגם (\bar{X}) יהיה בקרבת הממוצע באוכלוסייה (μ) גבוה יותר.

ולכן הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהממוצע של האוכלוסייה קטן יותר.

בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הממוצע באופן הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu$$

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.

את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא:

$$P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - ברק קנדל ©

איזה סיכוי יותר גבוה?

1. במדגם בגודל 100 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורצייה האמתית בלא יותר מ- 4%

2. במדגם בגודל 200 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורצייה האמתית בלא יותר מ- 4%

הסבר .

תרגילים:

1. באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכויי יותר גבוה ?
 א. אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.
 ב. שניים מתוך עשרה יהיו מובטלים.
 הסבר וחשב.
2. באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכויי יותר גבוה ?
 א. לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים
 ב. לפחות 30 מתוך 100 יהיו מובטלים
 הסבר
3. גובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. דוגמים 4 אנשים באקראי.
 א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה מעל 176 ס"מ.
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם? נמק.
4. ידוע שבהצעת חוק מסוימת תומכים 60% מהציבור. נדגמו באקראי 10 אנשים.
 א. מה ההסתברות שבדיוק 60% מהמדגם תומכים בהצעת החוק?
 ב. כיצד התשובה הייתה משתנה אם היו דוגמים 20 אנשים?
5. שני חוקרים ביצעו מדגם מאותה אוכלוסייה. חוקר א דגם 20 תצפיות והשני דגם 40 תצפיות וכל אחד מהם חישב את ממוצע המדגם: \bar{X}_{20} ו- \bar{X}_{40} . ידוע שהתפלגות היא נורמלית ושהתוחלת באוכלוסייה הינה 500. בסעיפים הבאים נמקו אילו הסתברויות מהזוגות המוצגים גדולה יותר או שהן שוות ונמקו.
 א. $P(\bar{X}_{20} > 500)$ או $P(\bar{X}_{40} > 500)$
 ב. $P(480 < \bar{X}_{20} < 520)$ או $P(480 < \bar{X}_{40} < 520)$
 ג. $P(\bar{X}_{20} < 490)$ או $P(\bar{X}_{40} < 490)$

6. נתון ש: $X \sim G(P = 0.1)$ מבצעים מדגם אקראי בגודל n מההתפלגות הזו ומחשבים את

ממוצע המדגם: \bar{X}_n .

הוכח: $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = 10$

פתרונות:**שאלה 3 :**

א. 0.1151

ב. קטנה

שאלה 4 :

א. 0.2508

ב. קטן

שאלה 5 :

$$P(\bar{X}_{40} > 500) = P(\bar{X}_{20} > 500) \quad \text{א.}$$

$$P(480 < \bar{X}_{40} < 520) > P(480 < \bar{X}_{20} < 520) \quad \text{ב.}$$

$$P(\bar{X}_{40} < 490) < P(\bar{X}_{20} < 490) \quad \text{ג.}$$

פרק 12 - אי שוויונים הסתברותיים

אי שוויון צ'ביצ'ב .א.

1. מצא חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 .
א.

$$p(2 < x < 14)$$

ב.

$$p(|x - 8| \geq 9)$$

2. מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר. יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

3. אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40% . נלקח מדגם מקרי בגודל 200 .
תן חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל- 45% .

4. מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב 20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100 . העזר באי שוויון צ'ביצ'ב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

5. בוחרים מספר n ספרתי באופן מקרי. (הספרה ראשונה יכולה להיות 0)
א. עבור $n = 10$: הערך את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.
ב. מה אורך המספר המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של 95% , ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75? לפי אי-שוויון צ'ביצ'ב.

6. בעיר מסוימת ל 5% מהמשפחות אין מכונית , ל-20% יש מכונית אחת , ל- 35% יש שתי מכוניות, ל- 30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות. נניח שמספר המשפחות ביישוב הוא גדול מאד. הערך את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27 .

ב. אי שוויון מרקוב

1. אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשב לפי אי שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות .
2. התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות . הערך את הסיכוי שבסה"כ בחמשת השפחות יש יותר מ- 15 משפחות.
3. ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 75.
 - א. מצא חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 85.
 - ב. נניח שהמרצה יודע בנוסף ששונות ציון מבחן הגמר של הסטודנט היא 25, מה אפשר לומר על ההסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה גבוה מ-65 ונמוך מ-85?

תשובות סופיות - אי שוויונים הסתברותיים

פרק א' - אי שוויון צ'ביצ'ב

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. בין $3/4$ ל- 1	לפחות 30
ב. בין 0 ל- $1/9$	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
0.52	0.75
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 6</u>
א. 0.825	0.706
ב. 294	

פרק ב' - אי שוויון מרקוב

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
בין 0 ל- $1/3$	לכל היותר 0.625
<u>שאלה 3</u>	
א. 0.8823	
ב. לפחות 0.75	

פרק 13 - משתנה מקרי דו ממדי רציף

רקע:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים.
פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי $f(x, y)$.
פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

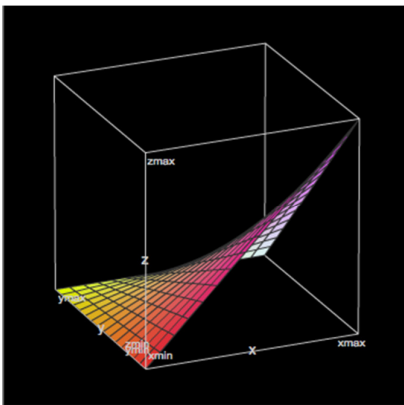
$$1 \quad f(x, y) \geq 0 \quad \text{לכל } (x, y) \in R$$

$$2 \quad \iint_R f(x, y) dx dy = 1$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

הראה שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.



פונקציית צפיפות שולית:

פונקציית הצפיפות השולית של X תתקבל באופן הבא:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

פונקציית הצפיפות השולית של Y תתקבל באופן הבא:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

מצא לפונקציית הצפיפות:

את פונקציית הצפיפות השולית של X וחשב את $E(X)$ דרכה.

אי תלות בין משתנים רציפים

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים אם עבור כל X ו- Y בתחום ההגדרה שלהם, R

$$\text{מתקיים ש: } f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

האם X ו- Y המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת :

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x, y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש X ו Y יהיו בתחום

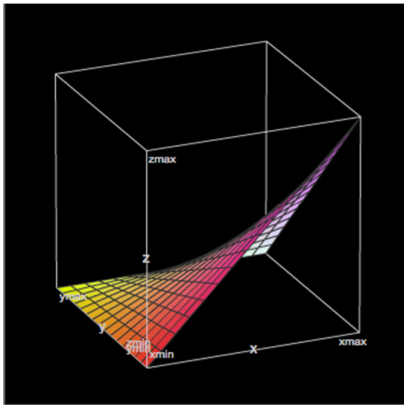
$$P[(x, y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy \quad \text{הזה:}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:

חשב את הסיכוי $P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$.



פונקציית התפלגות מצטברת משותפת

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s, t) = P(X \leq s \cap Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f(x, y) dx dy$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:

מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת ועל פיה חשב את הסיכוי:

$$. P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$$

פונקציית צפיפות מותנית

אם ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$ אז מגדירים את פונקציית הצפיפות

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} : \text{על ידי } f(y) > 0$$

ובאופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש $X = x$ לכל ערכי x המקיימים

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} : \text{על ידי } f(x) > 0$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:

מצא את $f(x|y)$

תוחלת מותנית

ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$.

התוחלת של X בהינתן ש $Y = y$ תהיה : $E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x | y) dx$

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש $X = x$ תהיה : $E(Y | X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y | x) dy$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות :

מצא את $E(X | Y)$

תרגילים:

1. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = x + y$ המוגדרת בתחום שבו $0 \leq x \leq 1$ וגם $0 \leq y \leq 1$. הוכח שמדובר בפונקציית צפיפות.

2. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = Ax(x - y)$ המוגדרת בתחום שבו $0 \leq x \leq 2$ וגם $-x \leq y \leq x$. מצא את ערכו של הפרמטר A .

3. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = \frac{(x \cdot y)^3 + x \cdot y}{C}$ המוגדרת בתחום שבו $0 \leq x \leq 1$ וגם $0 \leq y \leq 1$.

א. מצא את ערכו של C .

ב. מצא את $f(y)$.

ג. האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?

4. משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = \frac{1}{800}$ המוגדרת בתחום שבו $60 \leq x \leq y$ וגם $60 \leq y \leq 100$.

א. הראה שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.

ב. מצא את פונקציית הצפיפות השולית של Y .

ג. חשב את $E(X)$ ו- $V(X)$.

ד. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ה. חשב את מקדם המתאם בין X ל- Y .

ו. חשב את הסיכוי: $P(Y > X + 10)$.

5. משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = \lambda\mu \cdot e^{-(\lambda x + \mu y)}$: המוגדרת בתחום שבו $x, y > 0$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y .

ב. האם X ו- Y הם משתנים תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y ?

ד. חשב את הסיכוי: $P(Y > X)$.

6. Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע $[2, 4]$.

בנוסף נתון ש X הינו משתנה מקרי רציף המקיים:

$$f(x|y) = \frac{2x}{y^2} \quad 0 \leq x \leq y$$

מצא את השונות המשותפת של X ו- Y .

7. נתונים שני משתנים מקרים רציפים: X ו- Y . פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא:

$$f(x, y) = \begin{cases} x & 0 < y < 1 \quad 1 - y \leq x \leq 1 + y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את $f(y|x)$.

ג. מצא את $E(Y|X)$.

8. יהי X ו- Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו: $(-1,2)$, $(-1,0)$, $(0,1)$.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ושל Y .

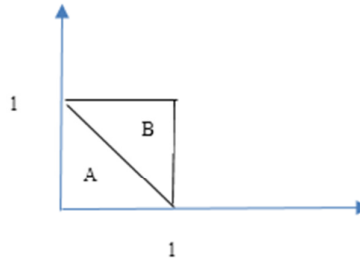
ג. חשבו את התוחלת של X ושל Y .

ד. האם X ו- Y משתנים בלתי מתואמים?

ה. האם X ו- Y משתנים בלתי תלויים?

9. פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:

הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 ואילו הצפיפות על פני משולש B היא 0.5.



א. האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את $f(x|y)$.

10. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת $f(X, y) = Cx$ פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו

$$0 \leq x \leq 1 \text{ וגם } 0 \leq y \leq x^2.$$

א. מצאו את הקבוע C .

ב. חשבו את ההסתברות ש $6Y < 1 - X$.

11. נתונים X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y \sim U(0,1)$ ו-

$$X | Y = y \sim U(0, \sqrt{y})$$

חשב את $E(Y | X = 0.5)$

12. נתונה פונקציית הצפיפות $f(x, y) = 2e^{-x} \cdot e^{-2y}$ בתחום שבו $x, y \geq 0$. חשבו את הסיכוי $P(X < Y)$.

13. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x, y) = \frac{e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$ פונקציה זו מוגדרת לרביע הראשון. חשבו את $P(X > 1 | Y = 2)$.

14. יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל 9:00. נניח שבזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה. מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ 10 דקות?

15. נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X \sim N(Y, 1)$ ו $Y \sim U(0, 2)$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ושל Y .

ב. מצאו את $E(X^2 | Y)$

ג. מצאו את $E(X)$

16. פונקציית הצפיפות המשותפת של X ושל Y היא: $f(x, y) = 1$ פונקציה זו מוגדרת בתחומי $0 \leq x, y \leq 1$

הוכח ש: $E(|X - Y|^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

17. $X \sim \exp(1)$ וכמו כן $Y \sim \exp(1)$ הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.

נגדיר את $Z = \frac{X}{X+Y}$. הוכח: $Z \sim U(0,1)$.

פתרונות:שאלה 2:

$$A = \frac{1}{8}$$

שאלה 3:

א. $\frac{5}{16}$

ב. $f(y) = 0.8y^3 + 1.6y$

ג. תלויים.

שאלה 4:

א. הוכחה

ב. $f(y) = \frac{y-60}{800}$

ג. $E(X) = 73\frac{1}{3}$ $V(X) = 88\frac{8}{9}$

ד. לא.

ה. 0.5

ו. 0.5625

שאלה 5:

א. $f(y) = \mu e^{-\mu y}$ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

ב. לא.

ג. 0

ד. $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

שאלה 6:

$$\frac{2}{9}$$

שאלה 7:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq x < 1 \quad 1-x < y < 1 \\ \frac{1}{2-x} & 1 \leq x \leq 2 \quad x-1 < y < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$E(y|x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

שאלה 8:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 1+x < y < 1-x \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y < 1 \\ 2-y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$E(X) = -\frac{2}{3} \quad E(Y) = 1 \quad \text{ג.}$$

ד. כן.

ה. לא.

שאלה 9:

א. כן.

$$f(x) = \begin{cases} 1.5 - x & 1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{1.5}{1.5-y} & 0 \leq x < 1-y \\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

שאלה 10:

א. 4

ב. 0.0947

שאלה 11:

$$\frac{7}{12}$$

שאלה 12:

$$\frac{1}{3}$$

שאלה 13:

$$e^{-\frac{1}{2}}$$

שאלה 14:

$$\frac{25}{72}$$

שאלה 15:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א.}$$

ב. $y^2 + 1$

ג. 1

שאלה 16:

הוכחה.

שאלה 17:

הוכחה.